# $\S12.6$ –Ratio Test, Root Test, Absolute Convergence

Mark Woodard

Furman U

Fall 2010

Mark Woodard (Furman U) §12.6 –Ratio Test, Root Test, Absolute Conve

Fall 2010 1 / 10

(3)





## 2 The ratio test



Mark Woodard (Furman U) §12.6 -Ratio Test, Root Test, Absolute Conv

A (10) A (10) A (10)

## If $\sum |a_n|$ converges, then $\sum a_n$ converges.

Mark Woodard (Furman U) §12.6 –Ratio Test, Root Test, Absolute Conv

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

## If $\sum |a_n|$ converges, then $\sum a_n$ converges.

#### Proof.

Mark Woodard (Furman U) §12.6 –Ratio Test, Root Test, Absolute Conv

<ロ> (日) (日) (日) (日) (日)

If  $\sum |a_n|$  converges, then  $\sum a_n$  converges.

### Proof.

• We have  $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ ; thus,  $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ .

- 4 週 ト - 4 三 ト - 4 三 ト

If  $\sum |a_n|$  converges, then  $\sum a_n$  converges.

#### Proof.

- We have  $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ ; thus,  $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ .
- Thus the series  $\sum (a_n + |a_n|)$  converges by SCT.

< 回 ト < 三 ト < 三 ト

If  $\sum |a_n|$  converges, then  $\sum a_n$  converges.

#### Proof.

- We have  $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ ; thus,  $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ .
- Thus the series  $\sum (a_n + |a_n|)$  converges by SCT.
- By hypothesis, the series  $\sum -|a_n|$  converges.

・ 同 ト ・ 三 ト ・ 三 ト

If  $\sum |a_n|$  converges, then  $\sum a_n$  converges.

#### Proof.

- We have  $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ ; thus,  $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ .
- Thus the series  $\sum (a_n + |a_n|)$  converges by SCT.
- By hypothesis, the series  $\sum -|a_n|$  converges.
- Consequently,

$$\sum a_n = \sum \left( \left( a_n + |a_n| \right) - |a_n| \right)$$

converges as well.

< 回 ト < 三 ト < 三 ト

Examine the convergence of the following series:

イロト イヨト イヨト イヨト

Examine the convergence of the following series:



イロト イヨト イヨト イヨト

Examine the convergence of the following series:

• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$
  
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{\sqrt{n^5+8}}$$

### Definition

Mark Woodard (Furman U) §12.6 –Ratio Test, Root Test, Absolute Conv

イロン イヨン イヨン イヨン

### Definition

If the series ∑ |a<sub>n</sub>| converges, then we say that the series ∑ a<sub>n</sub> converges absolutely.

< 回 > < 三 > < 三 >

#### Definition

- If the series  $\sum |a_n|$  converges, then we say that the series  $\sum a_n$  converges *absolutely*.
- if the series  $\sum a_n$  converges but  $\sum |a_n|$  diverges, then we say that the series  $\sum a_n$  converges *conditionally*.

通 ト イヨ ト イヨト

Does the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 converge absolutely, converge conditionally, or diverge?

<ロ> (日) (日) (日) (日) (日)

Does the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 converge absolutely, converge conditionally, or diverge?

## Solution

<ロ> (日) (日) (日) (日) (日)

Does the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 converge absolutely, converge conditionally, or diverge?

## Solution

• The series of absolute values diverges by PST, p = 1.

A B A A B A

< A</li>

Does the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 converge absolutely, converge conditionally, or diverge?

## Solution

- The series of absolute values diverges by PST, p = 1.
- The series converges by the AST.

A B F A B F

Does the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
 converge absolutely, converge conditionally, or diverge?

## Solution

- The series of absolute values diverges by PST, p = 1.
- The series converges by the AST.
- Thus the series converges conditionally.

( ) < ) < )</p>

Let  $\{a_n\}$  be a sequence of nonzero real numbers and suppose that

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$$

A B F A B F

- ∢ 🗇 እ

Let  $\{a_n\}$  be a sequence of nonzero real numbers and suppose that

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$$

• If L < 1, then  $\sum a_n$  converges absolutely.

( )

Let  $\{a_n\}$  be a sequence of nonzero real numbers and suppose that

$$rac{|a_{n+1}|}{|a_n|} 
ightarrow L$$

If L < 1, then ∑ a<sub>n</sub> converges absolutely.
If L > 1, then ∑ a<sub>n</sub> diverges.

< 3 > < 3 >

Let  $\{a_n\}$  be a sequence of nonzero real numbers and suppose that

$$rac{|a_{n+1}|}{|a_n|} 
ightarrow L$$

- If L < 1, then  $\sum a_n$  converges absolutely.
- If L > 1, then  $\sum a_n$  diverges.
- If *L* = 1, then the test is inconclusive; the series may or may not converge.

< 3 > < 3 >

Determine the convergence or divergence of the following series:

Determine the convergence or divergence of the following series:



< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Determine the convergence or divergence of the following series:

• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Determine the convergence or divergence of the following series:

• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Determine the convergence or divergence of the following series:

• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
  
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
  
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
  
• 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Suppose  $|a_n|^{1/n} \to L$ .

Suppose  $|a_n|^{1/n} \rightarrow L$ .

• If L < 1, then  $\sum a_n$  converges absolutely.

イロト 不得下 イヨト イヨト 二日

Suppose  $|a_n|^{1/n} \rightarrow L$ .

- If L < 1, then  $\sum a_n$  converges absolutely.
- If L > 1, then  $\sum a_n$  diverges.

Suppose  $|a_n|^{1/n} \rightarrow L$ .

- If L < 1, then  $\sum a_n$  converges absolutely.
- If L > 1, then  $\sum a_n$  diverges.
- If L = 1, then the test is inconclusive; the series may or may not converge.

・ 同 ト ・ ヨ ト ・ ヨ ト

Determine whether the series  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5n}\right)^n$ 

ries 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+6}\right)^n$$
 converges.

<ロ> (日) (日) (日) (日) (日)

Determine whether the series 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+6}\right)^n$$
 converges.

## Solution

Since

$$|a_n|^{1/n} = rac{3n}{5n+6} o rac{3}{5} < 1,$$

the series converges by the Root Test.