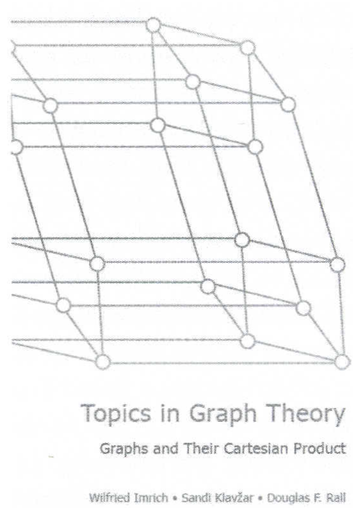
Wilfried Imrich, Sandi Klavžar in Douglas F. Rall: TOPICS IN GRAPH THEORY: GRAPHS AND THEIR CARTESIAN PRODUCT, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008, 220 strani.



V svetovnem matematičnem letu 2000 je pri založbi Wiley-Interscience izšla knjiga Wilfrieda Imricha in Sandija Klavžarja z naslovom *Product Graphs: Structure and Recognition*, ki je prvič na enem mestu zbrala vse glavne rezultate o strukturi in algoritmičnih lastnostih najpomembnejših štirih grafovskih produktov: kartezičnega, direktnega, krepkega in leksikografskega. Knjiga je pri raziskovalcih, pedagogih in študentih doživela zelo lep sprejem.

Zdaj je pred nami nova knjiga istih avtorjev, ki se jima je pridružil še Douglas F. Rall, izdala pa jo je založba A K Peters. Skupaj s knjigo *Graphs on Surfaces* Bojana Moharja in Carstena Thomassena, ki jo je leta 2001 izdala založba Johns Hopkins University Press, je to že tretja knjiga slovenskih (so)avtorjev na področju teorije grafov, objavljena pri ugledni mednarodni znanstveni založbi. Ta podatek prav gotovo potrjuje vitalnost in prodornost slovenske diskretne matematike in še posebej teorije grafov v svetovnem merilu.

Preden se posvetimo vsebini nove knjige, povejmo nekaj besed o avtorjih. Wilfried Imrich je profesor na Montanistični univerzi v Leobnu (Avstrija). Sandi Klavžar je profesor na univerzah v Ljubljani in Mariboru. V letu 2000 je prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke v matematiki na področju teorije grafov, v letu 2007 pa Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene in razvojne dosežke na področju matematike. Douglas F. Rall je profesor na Furmanovi univerzi v Greenvilleu (Južna Karolina, ZDA). Ker so avtorji sami vodilni raziskovalci na področju grafovskih produktov, prinaša knjiga veliko svežih rezultatov, ki so bili objavljeni v znanstvenih revijah približno sočasno z izidom knjige. Hkrati je bila knjiga že pred izidom temeljito preskušena pri podiplomskih tečajih na domačih univerzah avtorjev.

Zasnova knjige je zanimiva in inovativna: za rdečo nit so avtorji izbrali *kartezične produkte grafov in njihove podgrafe*, ki imajo zaradi svojih lepih metričnih lastnosti številne uporabe v teoriji kodiranja, dodeljevanju radijskih frekvenc, teoretični kemiji in drugod. Ob tej vodilni témi bralec spozna vsa pomembna področja teorije grafov – od povezanosti, hamiltonskosti in ravninskosti prek številnih invariant do metričnih, algebraičnih in algoritmičnih vidikov. Knjiga je tako razdeljena na pet delov, vsak od njih pa obsega več poglavij, ki jih je v celoti osemnajst. Zelo pohvalno je, da poglavja v povprečju ne presegajo deset strani, kar naredi knjigo berljivo in dostopno tudi manj veščim bralcem. Dobrodošli so tudi kratki „napovedniki“ na začetku vsakega poglavja, ki podajajo pregled vsebine poglavja in ga umeščajo v širši kontekst.

V prvem delu knjige spoznamo definicijo in osnovne lastnosti kartezičnega produkta grafov ter nekaj praktično pomembnih družin grafov, ki so definirane ali karakterizirane z njegovo pomočjo. To so *hiperkocke* (kartezične potence polnega grafa K_2), *Hammingovi grafi* (kartezični produkti poljubnih polnih grafov) in *hanojski grafi* (vpeti podgrafi Hammingovih grafov, ki ustrezajo prostoru stanj pri reševanju znanega problema hanojskega stolpa). V drugem delu se srečamo s hamiltonskostjo, ravninskostjo, prekrižnimi števili, povezanostjo in podgrafi, najprej v splošnem, nato pa še s posebnim ozirom na kartezične produkte grafov. Navedena je odprta domneva Rosenfelda in Barnetta iz leta 1973, da je prizma (kartezični produkt z grafom K_2) nad poljubnim 3-povezanim ravninskim grafom hamiltonski graf, hkrati pa je podan eleganten dokaz izreka, da je k-kratna prizma (kartezični produkt z grafom K_2^k) nad takim grafom hamiltonski graf za vse $k \geq 2$. Dokaz med drugim uporablja tudi karakterizacijo hamiltonskosti kartezičnega produkta hamiltonskega grafa in drevesa avtorjev Batagelja in Pisanskega iz leta 1982. Tretji del knjige je posvečen grafovskim invariantam, kot so neodvisnostno število, kromatično število, $\mathcal{P}$-kromatično število (kjer je $\mathcal{P}$ neka dedna lastnost grafov), krožno kromatično število, seznamsko kromatično število, $L(2,1)$-označevalno število, kromatični indeks in dominacijsko število. Avtorji si zastavijo zanimivo vprašanje, kaj lahko povemo o vrednosti neke invariante na kartezičnem produktu, če poznamo njene vrednosti na posameznih faktorjih. Kot izvemo, so razmere pri različnih invariantah zelo različne: medtem ko je npr. razmeroma preprosto videti, da je kromatično število kartezičnega produkta enako največjemu izmed kromatičnih števil njegovih faktorjev, pa je Vizingova domneva iz leta 1968, ki pravi, da je dominacijsko število kartezičnega produkta večje ali kvečjemu enako produktu dominacijskih števil faktorjev, še vedno odprta.

Kot že omenjeno, velika praktična uporabnost kartezičnih produktov izhaja predvsem iz njihovih lepih metričnih lastnosti, s katerimi se ukvarja četrti del knjige. Avtorji npr. pokažejo, da sta premer oziroma polmer kartezičnega produkta grafov enaka vsoti premerov oziroma polmerov njegovih faktorjev in da je mogoče njegov Wienerjev indeks (s katerim v teoretični kemiji opisujejo fizikalno-kemične lastnosti molekul) preprosto izračunati iz vrednosti Wienerjevega indeksa faktorjev. Med podgrafi kartezičnih produktov avtorji posebej izpostavijo *izometrične podgrafe*, pri katerih se metrika podgrafa ujema z zožitvijo metrike celotnega grafa na množico vozlišč podgrafa. Tako npr. izometrične podgrafe hiperkock imenujemo *delne kocke*, izometrične podgrafe Hammingovih grafov pa *delni Hammingovi grafi*. Ta del knjige se sklene z dokazom fundamentalnega izreka metrične teorije kartezičnih produktov, ki pravi, da ima vsak graf *kánonsko metrično predstavitev*, tj. enolično izometrično vložitev v kartezični produkt z maksimalnim številom neredundantnih faktorjev.

Peti del knjige obravnava algebraične in algoritmične lastnosti kartezičnih produktov. Če izomorfnih grafov ne ločimo med seboj, je množica grafov, opremljena s kartezičnim produktom, Abelov monoid z enoto K_1. Po analogiji s praštevili imenujemo grafe, ki nimajo netrivialnih kartezičnih razcepov, *pragrafi*. Avtorji pokažejo, da izrek o enoličnem razcepu grafa na pragrafe velja za vse povezane grafe, za nepovezane pa v splošnem ne. Zato je kar presenetljivo, da za vse grafe (tudi nepovezane) veljata pravili krajšanja in enoličnosti r-tih korenov. S pomočjo enoličnega razcepa povezanega grafa na pragrafe avtorji razkrijejo strukturo grupe avtomorfizmov povezanega grafa: le-ta je izomorfna grupi avtomorfizmov disjunktne unije prafaktorjev grafa. Te rezultate uporabijo za analizo *razlikovalnega števila* grafa, tj. najmanjšega naravnega števila d, za katero obstaja označitev vozlišč grafa z d oznakami, ki jo ohranja le identični avtomorfizem. Tako npr. dokažejo, da je razlikovalno število k-te kartezične potence poljubnega netrivialnega povezanega grafa, različnega od grafov K_2 in K_3, enako 2 za vse $k \geq 2$. Nazadnje avtorji predstavijo dva pomembna algoritma, in sicer za razcep povezanega grafa na pragrafe in za razpoznavanje delnih kock, oba s časovno zahtevnostjo $O(mn)$, kjer je n število vozlišč, m pa število povezav danega grafa.

Posebna dragocenost knjige so naloge, s katerimi se konča vsako poglavje in ki jih je skupaj več kot dvesto. Na koncu knjige najdemo rešitev ali vsaj namig za rešitev prav vsake od nalog. Seznam literature obsega 122 referenc, sledijo pa mu tri koristna kazala: imensko kazalo, kazalo oznak in stvarno kazalo.

Knjiga bo rabila raziskovalcem na področju grafovskih produktov kot enciklopedija znanih rezultatov, pedagogom in študentom kot izvrsten učbenik, veseli pa je bodo tudi vsi drugi ljubitelji teorije grafov, ki se želijo seznaniti z najnovejšimi rezultati na tem področju.

Marko Petkovšek